OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1911. N° 3.

SUR L'EXISTENCE DE VALEURS ARBITRAIREMENT PETITES DE LA FONCTION $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ DE RIEMANN POUR $\sigma > 1$

PAR

HARALD BOHR

Introduction.

La fonction $\zeta(s) = \zeta(\sigma + it)$ de Riemann est définie dans le demi-plan $\sigma > 1$ par la série absolument convergente

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s}. \qquad (1)$$

De (1) on conclut immédiatement l'expression donnée par Euler

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p (1 - p^{-s}), \qquad (2)$$

où p parcourt tous les nombres premiers 2, 3, 5, 7 ...., et où le produit infini converge absolument pour $\sigma > 1$.

Soit δ un nombre positif aussi petit qu'on voudra; l'équation (2) nous donne alors, pour $\sigma > 1 + \delta$, l'inégalité suivante

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\prod_p (1 - p^{-s})\right| \leq \prod_p (1 + p^{-\sigma}) < \prod_p (1 + p^{-(1+\delta)}) = K,$$

où $K = K(\delta)$ est une constante positive.

Par conséquent, pour chaque $\delta > 0$, $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ est limitée dans le demi-plan $\sigma > 1 + \delta$.

Dans un mémoire récent de M. E. Landau et de H. Bohr[1], nous avons démontré que la fonction $\zeta(s)$ prend, pour chaque

[1] H. Bohr et E. Landau: Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$. [Nachr. d. Kgl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, math. phys. Kl., 1910.]

$\delta > 0$, dans la bande

$$1 - \delta < \sigma < 1 + \delta,$$

toutes les valeurs une seule au plus exceptée; il s'ensuit de là immédiatement que, pour aucun $\delta > 0$, $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ n'est limitée dans le demi-plan $\sigma > 1 - \delta$.

Cependant les recherches dans notre mémoire cité dessus ne permettent pas de décider si $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ est limitée ou non dans le demi-plan $\sigma > 1$, ou autrement dit, si $\zeta(s)$ même à droite de la droite $\sigma = 1$ prend des valeurs absolues arbitrairement petites.

En partant de l'expression (2) je vais démontrer dans cette note que $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ n'est pas limitée dans le demi-plan $\sigma > 1$.

La démonstration de ce théorème est essentiellement fondée sur un théorème de KRONECKER sur les approximations diophantiques. En appliquant ce théorème-là au problème analytique en question, on emploit d'une façon assez caractéristique le théorème sur la décomposition unique d'un nombre entier positif en nombres premiers. — La méthode de recherche suivante permet, comme on voit sans peine, un emploi assez étendu aux fonctions qui se trouvent dans la théorie analytique des nombres premiers. Dans un mémoire prochain, je reviendrai sur ces questions d'une manière détaillée.

§ 1.

Dans ce paragraphe je vais démontrer le théorème auxiliaire suivant.

Théorème auxiliaire: Soit p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier (c. à d. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$), et soient σ_1 un nombre réel > 1, ε_1 un nombre positif aussi petit qu'on voudra, et N un nombre entier positif aussi grand qu'on voudra; alors il existe un nombre réel $t_1 = t_1(\sigma_1, \varepsilon_1, N)$ tel que

$$\left|\prod_{n=1}^{n=N}(1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)})\right| > (1-\varepsilon_1)\prod_{n=1}^{n=N}(1+p_n^{-\sigma_1}). \qquad (3)$$

Démonstration: Soit ε_2 un nombre tel que $0<\varepsilon_2<1$ et

$$(1-\varepsilon_2)^N > 1-\varepsilon_1\,,$$

notre théorème auxiliaire sera évidemment démontré, quand nous aurons établi l'existence d'un nombre réel t_1 tel que, pour tous les $n = 1, 2, 3, \ldots N$,

$$|1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)}| > (1-\varepsilon_2)\,(1+p_n^{-\sigma_1}). \qquad (4)$$

Posons

$$-p_n^{-(\sigma_1+it_1)} = p_n^{-\sigma_1}\cdot e^{i\varphi_n},$$

où

$$\varphi_n = \pi - t_1\log p_n = 2\pi\left(t_1\left(\frac{-\log p_n}{2\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)$$

désigne l'amplitude de $-p_n^{-(\sigma_1+it_1)}$.

Comme

$$\Re(z) \leqq |z|,$$

les inégalités (4) seront satisfaites si, pour tous les $n = 1, 2, \ldots N$,

$$\Re(1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)}) = 1+p_n^{-\sigma_1}\cos\varphi_n > (1-\varepsilon_2)(1+p_n^{-\sigma_1}),$$

donc, a fortiori, si

$$\cos\varphi_n(1+p_n^{-\sigma_1}) > (1-\varepsilon_2)(1+p_n^{-\sigma_1}),$$

c. à d. si

$$\cos\varphi_n > 1-\varepsilon_2 \qquad (n = 1, 2, \ldots N).$$

Soit maintenant ε_3 un nombre tel, que $0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{4}$ et

$$\cos(2\pi\,\varepsilon_3) > 1-\varepsilon_2;$$

l'existence d'un nombre réel t_1 qui satisfait aux inégalités (4) sera évidemment démontré, quand nous aurons démontré l'existence d'un nombre réel t_1, qui avec des nombres entiers $r_1, r_2, \ldots r_N$ satisfait aux inégalités

$$\left.\begin{array}{l}
\left|t_1\left(-\dfrac{\log p_1}{2\pi}\right)+\dfrac{1}{2}-r_1\right| < \varepsilon_3\\
\left|t_1\left(-\dfrac{\log p_2}{2\pi}\right)+\dfrac{1}{2}-r_2\right| < \varepsilon_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\left|t_1\left(-\dfrac{\log p_N}{2\pi}\right)+\dfrac{1}{2}-r_N\right| < \varepsilon_3
\end{array}\right\}. \qquad (5)$$

Or, KRONECKER a démontré le théorème suivant concernant les approximations diophantiques:

Soient $a_1, a_2, \ldots a_N$ des nombres réels tels qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_N a_N = 0,$$

où les quantités $c_1, c_2 \ldots c_N$ sont des nombres entiers qui ne sont pas tous 0. Soient encore $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_N$ N nombres réels quelconques, et ε un nombre positif aussi petit qu'on voudra. Alors il existe un nombre réel t_1 et N nombres entiers $r_1, r_2, \ldots r_N$ de sorte que les N inégalités

$$\begin{gathered} |t_1 a_1 + \beta_1 - r_1| < \varepsilon \\ |t_1 a_2 + \beta_2 - r_2| < \varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |t_1 a_N + \beta_N - r_N| < \varepsilon \end{gathered}$$

sont tous satisfaites.

Or, il n'existe aucune relation de la forme

$$c_1 \log p_1 + c_2 \log p_2 + \ldots + c_N \log p_N = 0,$$

où les nombres $c_1, c_2 \ldots c_N$ sont des entiers qui ne sont pas tous 0 — (ceci est une conséquence immédiate du théorème sur la décomposition unique d'un nombre entier en facteurs premiers) —; par conséquent le théorème de KRONECKER peut être appliqué au cas où

$$a_n = \log p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots N)$$

ou, ce que nous allons faire ici, au cas où

$$a_n = -\frac{1}{2\pi} \log p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots N).$$

Si ensuite on pose dans le théorème de KRONECKER

$$\beta_1 = \beta_2 \ldots = \beta_N = \frac{1}{2}$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon_3,$$

ce théorème énonce directement l'existence d'un nombre réel t_1, qui avec N nombres entiers $r_1, r_2, \ldots r_N$ satisfait aux inégalités (5), et notre théorème auxiliaire se trouve ainsi démontré.

§ 2.

Par le théorème établi dans le § 1 nous sommes à même de pouvoir aisément démontrer le théorème suivant.

Théorème I: Etant donné le nombre $\sigma_1 > 1$, soit $M = M(\sigma_1)$ la limite supérieure de la fonction $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ sur la droite $\sigma = \sigma_1$ c. à d. la limite supérieure de

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1 + it)}\right| \qquad (-\infty < t < \infty),$$

alors

$$M = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1}).$$

Démonstration: De l'expression (2) on conclut que pour tous les t réels

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1 + it)}\right| = \left|\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - p_n^{-(\sigma_1 + it)})\right| \leqq \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1})$$

et de là immédiatement

$$M \leqq \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1}).$$

Aussi l'égalité

$$M = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1})$$

sera vérifiée, si, quel que soit le nombre positif ε, nous démontrons l'existence d'un nombre réel t_1, pour lequel

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1 + it_1)}\right| > (1 - \varepsilon) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1}). \qquad (6)$$

L'existence d'un nombre t_1 qui satisfait à (6) se voit comme suit.

Soit $\varepsilon_1 > 0$ un nombre tel que

$$(1 - \varepsilon_1)^3 > 1 - \varepsilon,$$

nous déterminons un nombre entier N tel que

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1-p_n^{-\sigma_1}) > 1-\varepsilon_1 \tag{7}$$

et que

$$\prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1+p_n^{-\sigma_1}) < \frac{1}{1-\varepsilon_1}. \tag{8}$$

De (7) et (8) on conclut pour tous les t réels, que

$$\left|\prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1-p_n^{-(\sigma_1+it)})\right|$$

$$\geqq \prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1-p_n^{-\sigma_1}) > (1-\varepsilon_1)^2 \prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1+p_n^{-\sigma_1}).$$

Maintenant, N étant fixé, nous déterminons un nombre réel t_1 (ce qui est possible selon le théorème auxiliaire du § 1), tel que

$$\left|\prod_{n=1}^{n=N}(1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)})\right| > (1-\varepsilon_1)\prod_{n=1}^{n=N}(1+p_n^{-\sigma_1}). \tag{3}$$

Pour ce t_1 nous aurons

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1+it_1)}\right| = \left|\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)})\right|$$

$$= \left|\prod_{n=1}^{n=N}(1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)})\right| \cdot \left|\prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1-p_n^{-(\sigma_1+it_1)})\right|$$

$$> (1-\varepsilon_1)\prod_{n=1}^{n=N}(1+p_n^{-\sigma_1}) \cdot (1-\varepsilon_1)^2 \prod_{n=N+1}^{n=\infty}(1+p_n^{-\sigma_1})$$

$$= (1-\varepsilon_1)^3 \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+p_n^{-\sigma_1}) > (1-\varepsilon)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+p_n^{-\sigma_1}).$$

Voilà le théorème I démontré.

Après avoir trouvé ci-dessus, pour chaque $\sigma_1 > 1$, la limite supérieure $M = M(\sigma_1)$ de la fonction $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ sur la droite $\sigma = \sigma_1$, nous sommes maintenant facilement à même de démontrer que $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ n'est pas limitée dans le demi-plan $\sigma > 1$, c. à d. de démontrer le théorème suivant.

Théorème II: Soit K une constante positive aussi grande qu'on voudra, il existe un nombre $s_1 = \sigma_1 + it_1$ tel que $\sigma_1 > 1$ et

$$\left|\frac{1}{\zeta(s_1)}\right| > K.$$

Démonstration:

Le produit

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-1})$$

étant divergent, comme on le sait, il existe un nombre N tel que

$$\prod_{n=1}^{n=N} (1 + p_n^{-1}) > K.$$

Il s'en suit immédiatement par continuité l'existence d'un nombre $\sigma_1 > 1$ tel que

$$\prod_{n=1}^{n=N} (1 + p_n^{-\sigma_1}) > K,$$

donc a fortiori, tel que

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1}) > K. \tag{9}$$

Cependant la limite supérieure de $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ sur la droite $\sigma = \sigma_1$ étant, d'après le théorème I, égale à

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + p_n^{-\sigma_1})$$

on conclut immediatement de (9) l'existence d'un nombre réel t_1 tel que

$$\left|\frac{1}{\zeta(s_1)}\right| = \left|\frac{1}{\zeta(\sigma_1 + it_1)}\right| > K,$$

et notre théorème se trouve ainsi démontré.

Nous terminons par demontrer le théorème suivant:

Théorème III: La fonction $\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right|$ n'est non plus limitée sur la droite même $\sigma = 1$, c. à d. la fonction $\zeta(1+it)$, qui pour toute valeur réelle de t est différent de 0, prend des valeurs absolues aussi petites qu'on voudra.

Démonstration: Supposons que le théorème soit faux; la fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ serait régulière et limitée sur toute la frontière du domaine

$$1 \leqq \sigma \leqq 2, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{10}$$

Or, nous savons que la fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ est régulière dans l'intérieur du domaine (10) et qu'il existe dans ce même domaine une inégalité de la forme

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < K_1 + |t|^{K_2},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes positives.

Cela posé, un théorème important de M. M. PHRAGMÉN-LINDELÖF[1] donnerait que la fonction $\frac{1}{\zeta(s)}$ serait limitée dans tout le domaine (10), par conséquent, dans tout le demi-plan $\sigma > 1$, ce qui est en contradiction avec le théorème II. Voilà le théorème III démontré.

[1] Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse .... [Acta Mathematica, Bd. XXXI (1908), S. 382].